Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 2). «Variación y optimización de funciones: Interpretación geométrica del Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Función creciente y función decreciente. Concavidad de la gráfica de una función. Extremos relativos de una función. Criterios de la primera y de la segunda derivada. Extremos absolutos de una función. Resolución de problemas de optimización. Visualización de los resultados obtenidos empleando software matemático.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los 10 finales de Cálculo Diferencial del Plan 2010 hay al menos un problema de esta parte (11 problemas: optimación 6, análisis de la gráfica 4 y valor medio 1). En 35 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016 hay un problema: optimación 16, análisis de la gráfica 14, teorema de Rolle 3 y extremos absolutos en un intervalo cerrado 2; además salen en los segundos parciales.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2C.1 (20 min): los teoremas, los criterios de la primera y la segunda derivada y la concavidad.
  2. Aprende la tabla de variación (2C.3.4) y la plantilla de optimación (2C.3.6): con ellas se resuelve casi todo.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 2C.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 2C.5 con cronómetro: 20 min cada uno. La optimación es la mitad de los problemas: no te saltes los últimos tres.

2C.1 Conceptos y expresiones

Extremos. Una función f tiene un *máximo relativo* en c si $f(c) \geq f(x)$ para toda x cercana a c, y un *mínimo relativo* si $f(c) \leq f(x)$ para toda x cercana a c. Si la desigualdad vale para toda x de un intervalo I, el extremo es *absoluto* en I. El *valor* máximo es $f(c)$; el punto de la gráfica es $(c, f(c))$.

Valor crítico. Un número c del dominio de f es crítico si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe. Los extremos relativos solo pueden estar en valores críticos; pero un valor crítico puede no ser extremo (x^3 en $x = 0$).

Teorema de Weierstrass (de los valores extremos). Si f es continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, entonces f alcanza en $[a, b]$ un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Están en un valor crítico interior o en un extremo del intervalo.

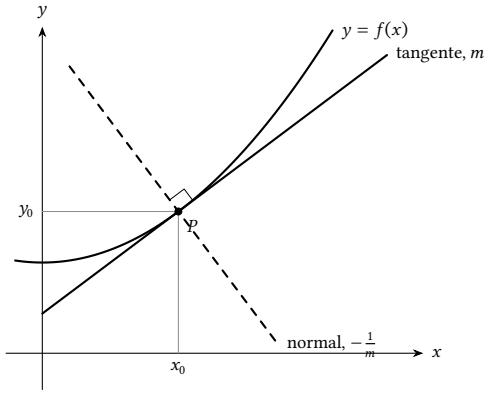
Teorema de Bolzano. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios,

Orden superior. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ es la derivada de y'; y''', la de y'', y así sucesivamente.

Recta tangente y recta normal. En $P(x_0, y_0)$ de la curva, con $m = y'(x_0)$:

$$\text{tangente: } y - y_0 = m(x - x_0), \qquad \text{normal: } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

La normal es perpendicular a la tangente. Si $m = 0$, la tangente es horizontal ($y = y_0$) y la normal vertical ($x = x_0$).

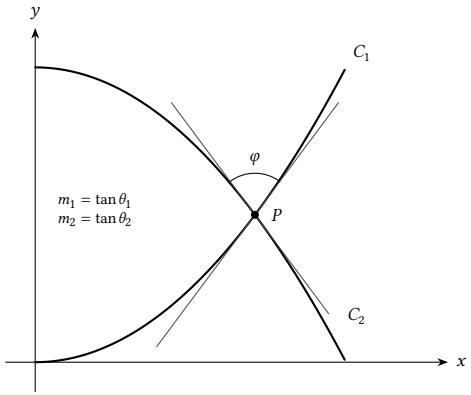


Rectas paralelas y perpendiculares. La recta $Ax + By + C = 0$ tiene pendiente $-\frac{A}{B}$. Dos rectas son paralelas si $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

Ángulo entre dos curvas. En un punto de intersección, es el ángulo agudo φ entre sus tangentes. Con pendientes m_1 y m_2:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Si $1 + m_1 m_2 = 0$, las curvas se cortan en ángulo recto ($\varphi = 90°$); si $m_1 = m_2$, son tangentes entre sí ($\varphi = 0$).



2B.7 Errores frecuentes

- **Usar L'Hôpital sin forma indeterminada.** Antes de derivar, sustituye y escribe la forma. $\frac{1}{0^+}$ no es indeterminada: es ∞.
- **Derivar con la regla del cociente.** En L'Hôpital se derivan el numerador y el denominador por separado.
- **Olvidar regresar del logaritmo.** En 1^∞, 0^0 e ∞^0 se calcula $\lim \ln y = L$; la respuesta es e^L, no L.
- **Creer que** $1^\infty = 1$**.** Es indeterminada: $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} \to e^6$.
- **Signos en las hiperbólicas.** $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$, sin el signo menos del coseno; $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$.
- **Usar la regla donde el enunciado la prohíbe.** Los límites de la Parte 1B dicen «sin emplear la regla de L'Hôpital»; ahí un límite resuelto con ella no cuenta.

2B.8 Formulario de emergencia de la parte

- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$, derivando por separado.
- $0 \cdot \infty$: $fg = \frac{f}{1/g}$. $\infty - \infty$: común denominador.
- $y = f^{\,g}$: $\ln y = g \ln f$, $\lim y = e^{\lim g \ln f}$; con $f \to 1$, $g \to \infty$: $\lim f^{\,g} = e^{\lim g(f-1)}$.
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$; $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$; $(\coth u)' = -\operatorname{csch}^2 u\, u'$; $(\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{csch} u \coth u\, u'$.

2B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Sustituye y escribe la forma indeterminada antes de cualquier otra cosa.
2. Cociente $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: deriva arriba y abajo por separado, simplifica y vuelve a sustituir.
3. Producto o resta: pasa a cociente. Potencia $f^{\,g}$: toma ln, pasa a cociente, aplica la regla y termina con e^L.
4. Saca del límite los factores que tienden a un número distinto de cero para no derivarlos.
5. Comprueba con los límites de memoria o con la regla rápida de 1^∞.

2B.10 Lo que agrega el Plan 2026: la regla con la computadora

El programa pide usar software para ilustrar la regla. Una manera: evaluar $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cerca del punto y ver que se acercan al mismo número; otra, calcular el límite directamente, como en el recuadro. La regla también confirma los límites de la Parte 1B: por ejemplo, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$. (No sirve para *demostrar* ese límite, porque la derivada del seno se obtiene a partir de él.)

Ejercicio propuesto 2B.10.1 · L'Hôpital dos veces con la exponencial

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Resultado: $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«recta tangente», «recta normal» en un punto	pendiente y punto-pendiente	2A.3.6
tangente «horizontal», «paralela» o «perpendicular» a una recta	igualar y' a la pendiente pedida	2A.3.6
«área del triángulo» con los ejes o con la normal	intersecciones de las rectas	2A.3.6
«ángulo de intersección» entre curvas o con una recta	$\tan\varphi$ con las dos pendientes	2A.3.7
«rapidez», «razón», «a qué ritmo», unidades por segundo o por minuto	razón de cambio relacionada	2A.3.8
«aproximar», «estimar», «diferencial»	$dy = f'(x)\,dx$	2A.3.9
$y = f(x)^{g(x)}$, productos y cocientes grandes	derivación logarítmica	2A.3.10

2A.3 Procedimientos

2A.3.1 Derivada por definición (cuatro pasos)

1. Escribe $f(x+h)$: cambia cada x por $(x+h)$.
2. Calcula el incremento $f(x+h) - f(x)$ y simplifícalo (denominador común, desarrollo de binomios).
3. Divide entre h. Antes de pasar al límite hay que **cancelar el factor** h: factoriza o racionaliza (multiplica por el conjugado).
4. Toma el límite cuando $h \to 0$, sustituyendo $h = 0$.

Ejemplo breve: con $f(x) = x^2$, $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x$.

2A.3.2 Derivada con reglas y regla de la cadena

1. Reescribe antes de derivar: raíces como potencias ($\sqrt[4]{x+1} = (x+1)^{1/4}$), $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.
2. Identifica la operación «de afuera» (potencia, cociente, ang tan, sen…) y aplica su fórmula; multiplica por la derivada de lo de adentro. Repite capa por capa.
3. Simplifica: factor común, denominador común, $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$.
4. Si se pide $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ o una segunda derivada evaluada, sustituye solo al final.

2A.3.3 Derivabilidad de una función por partes

1. En cada punto de unión x_0, **continuidad**: el valor de la regla izquierda en x_0 igual al de la regla derecha.
2. **Derivabilidad**: deriva cada regla y exige que las derivadas en x_0 coincidan (derivadas laterales iguales).
3. Resuelve el sistema para las constantes. Si sobran ecuaciones, comprueba que todas se cumplan.
4. Si la función no es continua en x_0, no es derivable ahí, aunque las pendientes coincidan.

2B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2B.5.1 · Forma 0^0 con seno hiperbólico

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 3.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. El enunciado original escribe $x \to 0$; como $x^{\operatorname{senh} x}$ solo está definida para $x > 0$, el límite es por la derecha. Al sustituir, la base y el exponente tienden a 0: forma 0^0.
2. Sea $y = x^{\operatorname{senh} x}$: $\ln y = \operatorname{senh} x \ln x = \dfrac{\ln x}{\operatorname{csch} x}$, de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital, con $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{csch} x \coth x} = \lim_{x\to 0^+} \Big(-\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x \cosh x}\Big).$$

4. Se separa: $-\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to -1 \cdot \dfrac{0}{1} = 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to \frac{\cosh 0}{1} = 1$).
5. $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x} = e^0 = \mathbf{1}$.

Ejercicio 2B.5.2 · Forma $\infty - \infty$: L'Hôpital dos veces

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 1}\Big(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\Big)$.

Resolución.

1. Cerca de 1, las dos fracciones crecen sin límite: forma $\infty - \infty$. Común denominador:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\ln x + 1 - 1 = \ln x$; denominador $\ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Sigue $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: numerador $\frac{1}{x}$; denominador $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1+1}.$$

4. **El límite vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 2B.5.3 · Forma ∞^0

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 2.

Determine, si existe, $\lim_{x\to 0^+}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)^x$.

Resolución.

semejantes, trigonometría). Si aparece una variable de más, elimínala con un dato fijo o una relación.

4. **Derivar respecto a t.** Cada variable produce su razón por la regla de la cadena: $\frac{d}{dt} r^3 = 3r^2 \frac{dr}{dt}$.
5. **Sustituir al final** los valores del instante, despejar y dar el resultado con unidades y sentido (aumenta o disminuye).

No sustituyas el valor del instante antes de derivar: una variable con valor fijo tendría derivada cero.

2A.3.9 Diferencial y aproximación

1. Elige f, un valor x donde $f(x)$ sea fácil ($\sqrt{16}$, sen $\frac{\pi}{6}$) y el incremento $dx = \Delta x$.
2. Calcula $dy = f'(x)\,dx$.
3. Aproxima $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$, o el cambio $\Delta y \approx dy$.

2A.3.10 Derivación logarítmica y $f(x)^{g(x)}$

1. Si la variable está en la base y en el exponente, $y = f(x)^{g(x)}$, no sirven ni $(u^n)'$ ni $(a^u)'$. Toma logaritmo natural: $\ln y = g(x) \ln f(x)$.
2. Deriva implícitamente: $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. Multiplica por y y sustituye $y = f(x)^{g(x)}$.
4. El mismo método simplifica productos y cocientes largos: el logaritmo los vuelve sumas.

2A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Tangente y normal con derivación implícita

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto $A(1, 1)$.

Resolución.

1. El punto está en la curva: $1 + 3 + 1 = 5$.
2. Derivación implícita, con regla del producto en $3xy$:

$$2x + 3\,(y + xy') + 2yy' = 0.$$

3. Se agrupan los términos con y' y se despeja:

$$(3x + 2y)\,y' = -(2x + 3y) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

4. Pendiente en $A(1,1)$: $m = -\frac{2+3}{3+2} = -1$. La normal tiene pendiente $-\frac{1}{m} = 1$.
5. Tangente: $y - 1 = -(x - 1)$, es decir, $x + y - 2 = 0$.
6. Normal: $y - 1 = 1(x - 1)$, es decir, $x - y = 0$.

Resultado: tangente $x + y - 2 = 0$; normal $x - y = 0$.

2B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular, si existe, el límite» de un cociente que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$	L'Hôpital (2B.3.1)
Un producto que da $0\cdot\infty$, o una resta de fracciones que da $\infty-\infty$	Reescribir como cociente (2B.3.2)
Una potencia $f(x)^{g(x)}$ que da 1^∞, 0^0 o ∞^0	Tomar logaritmo (2B.3.3)
Aparecen senh, cosh, tanh, coth en el límite	Sustituir $\operatorname{senh}0=0$, $\cosh 0=1$ para ver la forma; derivar con la tabla de la sección 2A.1
«Sin emplear la regla de L'Hôpital»	No se usa: técnicas de la Parte 1B (1B.3)

2B.3 Procedimientos

2B.3.1 L'Hôpital: formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

1. Sustituye el valor: confirma que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Escríbelo, porque sin forma indeterminada la regla no se aplica.
2. Deriva el numerador y el denominador por separado.
3. Simplifica el nuevo cociente (fracciones dentro de fracciones, factores comunes) y vuelve a sustituir.
4. Si sigue indeterminado, repite. Si un factor tiende a un número distinto de cero (como $\cos x\to 1$ o $\frac{\operatorname{senh}x}{x}\to 1$), sácalo del límite para no derivarlo.

2B.3.2 L'Hôpital: formas $0\cdot\infty$ e $\infty-\infty$

1. $0\cdot\infty$: escribe $f\,g=\frac{f}{1/g}$ o $\frac{g}{1/f}$. Deja en el denominador el factor que sea más fácil de derivar; un ln se queda casi siempre en el numerador.
2. $\infty-\infty$ con dos fracciones: haz la resta con común denominador. Queda $\frac{0}{0}$.
3. Aplica 2B.3.1.

2B.3.3 L'Hôpital: formas 1^∞, 0^0 e ∞^0

1. Llama $y=f(x)^{g(x)}$ e identifica la forma sustituyendo.
2. Toma logaritmo: $\ln y=g(x)\ln f(x)$. Es $0\cdot\infty$.
3. Escríbelo como cociente, $\ln y=\dfrac{\ln f(x)}{1/g(x)}$, y aplica 2B.3.1.
4. Si $\lim \ln y=L$, entonces $\lim y=e^{L}$. **No olvides este paso:** el límite de $\ln y$ no es la respuesta.
5. Comprobación rápida para 1^∞: si $f\to 1$ y $g\to\infty$, entonces $\lim f^{\,g}=e^{\lim g\,(f-1)}$.

1. a) Con $u=3x$, $u'=3$, y la fórmula de ang sec u:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}}=\frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}},\qquad |x|>\tfrac{1}{3}.$$

   Con la fórmula sin valor absoluto queda $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$, igual para $x>\frac{1}{3}$.
2. b) Se reescribe $y=x^{1/2}-x^{-1/2}$ y se aplica la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

Resultado: a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}$; b) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

Ejercicio 2A.5.2 · Continua y derivable: tres reglas

Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 3.

Determine los valores reales de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } -8\le x<-1,\\ ax+b & \text{si } -1\le x<2,\\ -\frac{x^2}{2}-7 & \text{si } 2\le x\le 5,\end{cases}$$

sea continua en $[-8,5]$ y derivable en $(-8,5)$.

Resolución.

1. Las tres reglas son polinomios: solo hay que revisar las uniones $x=-1$ y $x=2$. Derivadas de las reglas: $2x$, a y $-x$.
2. En $x=-1$. Continuidad: $(-1)^2-4=-a+b$, es decir, $-a+b=-3$. Derivabilidad: $2(-1)=a$, así que $a=-2$.
3. Entonces $b=-3+a=-5$.
4. En $x=2$, con $a=-2$ y $b=-5$. Continuidad: $2a+b=-9$ y $-\frac{4}{2}-7=-9$. Se cumple. Derivabilidad: $a=-2$ y $-x\big|_{x=2}=-2$. Se cumple.
5. Las cuatro condiciones se satisfacen con los mismos valores: la recta $y=-2x-5$ es tangente a las dos parábolas en los puntos de unión.

móvil está en reposo cuando $v = 0$; si v y a tienen el mismo signo, el móvil acelera, y si tienen signos contrarios, frena. Lo mismo vale para cualquier cantidad que cambia con el tiempo: la corriente es la razón de cambio de la carga, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; el caudal, la del volumen, $Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

Ejercicio propuesto 2A.10.1 · Velocidad y aceleración de un móvil

La posición de una partícula sobre una recta es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en metros, con t en segundos y $t \geq 0$). a) Obtenga su velocidad y su aceleración. b) ¿En qué instantes está en reposo? c) ¿En qué instante la aceleración es cero y cuánto vale ahí la velocidad?

Resultado: a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ m/s, $a(t) = 6t - 12$ m/s^2; b) en $t = 1$ y $t = 3$ s; c) en $t = 2$ s, con $v(2) = -3$ m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2A.10.2 · Una raíz cúbica con la diferencial

Con la diferencial, estime $\sqrt[3]{8.12}$.

Resultado: $\sqrt[3]{8.12} \approx 2.01$ (el valor verdadero es 2.00995…).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Con la computadora

```
# Pendiente, tangente y normal del primer ejemplo:
# x^2 + 3xy + y^2 = 5 en (1, 1)
from sympy import Eq, idiff, solve, symbols
x, y = symbols("x y")
F = x**2 + 3*x*y + y**2 - 5
m = idiff(F, y, x).subs({x: 1, y: 1})
print(m)                                          # -1
tangente = Eq(y - 1, m*(x - 1))
normal = Eq(y - 1, -(x - 1)/m)
print(solve(tangente, y), solve(normal, y))   # [2 - x] [x]
assert m == -1
```


Ejercicio 2A.5.4 · Segundas derivadas: ang tan y paramétrica

Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 3.

a) Sea $y = x \operatorname{ang\,tan} x$; calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}$. b) Para $x = t - 1$, $y = 2t^3 - 1$, calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

Resolución.

1. a) Regla del producto: $y' = \operatorname{ang\,tan} x + \frac{x}{1+x^2}$.
2. Otra vez, con la regla del cociente en el segundo término:

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

3. En $x = \frac{1}{2}$: $1 + x^2 = \frac{5}{4}$ y $y'' = \frac{2}{25/16} = \frac{32}{25}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2$, así que $\frac{dy}{dx} = 6t^2$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(6t^2)}{dx/dt} = \frac{12t}{1} = 12t$.
6. $x = 1$ corresponde a $t - 1 = 1$, $t = 2$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 24$.

Resultado: a) $\frac{32}{25}$; b) 24.

Ejercicio 2A.5.5 · Tangentes perpendiculares a una recta

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 4.

Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{x}$ que sean perpendiculares a la recta $x - 9y = 2$.

Resolución.

1. La recta dada, $y = \frac{x-2}{9}$, tiene pendiente $\frac{1}{9}$. Las perpendiculares tienen pendiente -9.
2. $y' = -\frac{1}{x^2} = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$. Puntos de tangencia: $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.
3. En $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$: $y - 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y - 6 = 0$.
4. En $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$: $y + 3 = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y + 6 = 0$.

Resultado: $9x + y - 6 = 0$ y $9x + y + 6 = 0$.

Ejercicio 2A.5.6 · Tangentes horizontales a una circunferencia

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta $y = 0$.

Resolución.

1. Paralela a $y = 0$ quiere decir horizontal: $y' = 0$.
2. Derivación implícita: $2x + 2yy' = 4 + 4y' \Rightarrow (2y - 4)\,y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y-2}$.
3. $y' = 0$ exige $x = 2$ (con $y \neq 2$). En la curva: $4 + y^2 = 8 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0$.
4. $y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Ninguno vale 2, así que el denominador no se anula.

Ejercicio propuesto 2A.6.5

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D, problema 2.

Obtenga el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de ordenada $y = \frac{1}{2}$.

Resultado: 2 unidades cuadradas.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.6

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo A, problema 4.

Una placa metálica circular de radio 20 cm se calienta y su radio aumenta 0.02 cm. Con la diferencial, estime el aumento del área de la placa y compárelo con el aumento exacto.

Resultado: $dA = 0.8\pi$ cm$^2 \approx 2.513$ cm^2; el aumento exacto es $\Delta A = 0.8004\pi$ cm^2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2A.6.7

Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 2.

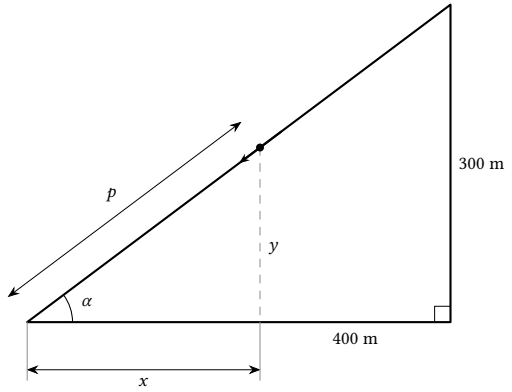
Calcule $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1}$ para la curva $y = \operatorname{sen} 2t$, $x = \cos^2 2t$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Resultado: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = -\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

2A.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar la regla de la cadena.** $(\operatorname{sen} 3x)' = 3\cos 3x$, no $\cos 3x$; $\left(\operatorname{ang\,tan}\sqrt{x}\right)'$ lleva el factor $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. **Derivar y como constante** en la implícita: $\frac{d}{dx}y^2 = 2y\,y'$, no $2y$; $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, no y'.
3. **Segunda derivada paramétrica como $\frac{y''(t)}{x''(t)}$.** Se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a t y se divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. **Evaluar en x cuando la paramétrica pide t**: primero se halla el t que corresponde al valor de x.
5. **Normal con pendiente $-m$** en lugar de $-\frac{1}{m}$.
6. **Derivable sin continuidad.** En una función por partes, igualar pendientes no basta: primero los valores.
7. **Sustituir el instante antes de derivar** en razón de cambio: el radio «vale 4» solo en ese instante; si se sustituye antes, su derivada sale cero.
8. **Signo de las razones.** Lo que disminuye (gas que escapa, agua que sale) lleva razón negativa.
9. **Unidades mezcladas** (mm^3 con cm, m^3 con cm): uniforma antes de sustituir.
10. **Ángulo entre curvas sin valor absoluto**: $\tan\varphi$ negativa da el ángulo obtuso; el ángulo entre curvas es el agudo.
11. **Confundir $(\cosh u)'$ con $(\cos u)'$**: la derivada de $\cosh u$ es $+\operatorname{senh} u\,u'$.



Resolución.

1. **Variables:** p (sobre la rampa), x (horizontal) y y (altura), funciones de t.
2. **Datos:** el esquiador baja hacia el punto más bajo, así que p disminuye: $\frac{dp}{dt} = -10$ m/s. Se pide $\frac{dx}{dt}$.
3. **Ecuación:** la rampa mide $\sqrt{400^2 + 300^2} = 500$ m. Por triángulos semejantes, $\frac{x}{p} = \frac{400}{500}$, es decir, $x = \frac{4}{5}p$.
4. **Derivada:** $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}(-10) = -8$ m/s.
5. La razón es constante: no depende de dónde esté el esquiador. (La altura cambia a $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}(-10) = -6$ m/s.)

Resultado: x disminuye a razón de 8 m/s, en cualquier instante.

Nota: el original pide la razón «en el instante en que el esquiador se encuentra a 3 m del punto más bajo»; ese dato no se usa.

Ejercicio 2A.5.9 · Implícita y potencia con exponente variable

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.

Calcule $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2y + xy^2 = y - x$; b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita, con regla del producto en los dos términos de la izquierda:

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = y' - 1.$$

2. Se agrupan los términos con y':

$$\left(x^2 + 2xy - 1\right)y' = -1 - 2xy - y^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1 + 2xy + y^2}{1 - x^2 - 2xy}.$$

3. b) La variable está en la base y en el exponente: derivación logarítmica (con $x > 0$). $\ln y = \operatorname{sen} x\,\ln x$.

Diferencial. Para $y = f(x)$, la diferencial es $dy = f'(x)\,dx$, con $dx = \Delta x$. Para Δx pequeño, el incremento verdadero $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ se aproxima con dy:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Es la recta tangente usada como aproximación. Ejemplo: con $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $\Delta x = 1$: $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}}(1) = 4 + \frac{1}{8} = 4.125$ (el valor verdadero es 4.1231…). La integral usa esta notación en el cambio de variable: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$.

Logaritmo, exponencial e hiperbólicas. Con $a > 0$, $a \neq 1$:

Función	Derivada	Función	Derivada
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$e^u\,u'$	a^u	$a^u \ln a\; u'$
$\operatorname{senh} u$	$\cosh u\; u'$	$\cosh u$	$\operatorname{senh} u\; u'$
$\tanh u$	$\operatorname{sech}^2 u\; u'$	$\coth u$	$-\operatorname{csch}^2 u\; u'$
$\operatorname{sech} u$	$-\operatorname{sech} u \tanh u\; u'$	$\operatorname{csch} u$	$-\operatorname{csch} u \coth u\; u'$
$\operatorname{senh}^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\cosh^{-1} u\ (u>1)$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\tanh^{-1} u\ (\lvert u\rvert<1)$	$\frac{u'}{1-u^2}$		

Ojo con los signos: $(\cosh u)' = +\operatorname{senh} u\; u'$, a diferencia de $(\cos u)'$. Útiles al simplificar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, $\ln e^u = u$, $e^{\ln u} = u$, $\ln u^n = n \ln u$.

2A.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«por definición», «método de los cuatro pasos»	el límite del cociente de incrementos	2A.3.1
$y =$ una expresión en x, «obtener $\frac{dy}{dx}$»	reglas y cadena	2A.3.2
una segunda derivada evaluada en un punto	derivar dos veces y evaluar	2A.3.2
función por partes con constantes, «continua y derivable»	igualar valores y pendientes	2A.3.3
una ecuación con x y y mezcladas: $\tan(xy) = 2x + y$	derivación implícita	2A.3.4
$x = x(t)$, $y = y(t)$	cociente de derivadas respecto a t	2A.3.5

Con la computadora

```
# El ejemplo de la forma 1^infinito: (1 + 2/x)^(3x)
from sympy import E, limit, log, oo, symbols
x = symbols("x", positive=True)
y = (1 + 2/x)**(3*x)
L = limit(3*x*log(1 + 2/x), x, oo)   # limite de ln y
print(L, limit(y, x, oo))                          # 6 exp(6)
assert L == 6 and limit(y, x, oo) == E**6
```

2A.3.4 Derivación implícita

1. Deriva los dos lados respecto a x. Cada vez que derives algo con y, multiplica por y' (regla de la cadena). Los productos xy, x^2y llevan regla del producto.
2. Pasa al lado izquierdo los términos con y' y al derecho los demás.
3. Factoriza y' y despeja.
4. Para una pendiente en un punto, sustituye x_0 y y_0 en y' (no hace falta despejar y en la curva).

2A.3.5 Derivación paramétrica y segunda derivada

1. Calcula $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, y forma $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. Simplifica.
2. Si se pide en un valor de x (o de y), encuentra el valor del parámetro t que le corresponde; puede haber dos.
3. Segunda derivada: deriva $\frac{dy}{dx}$ *respecto a* t y divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. Si en el punto pedido $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ (forma $\frac{0}{0}$), simplifica el cociente antes de evaluar o elimina el parámetro.

2A.3.6 Recta tangente y recta normal

1. **Punto.** Si solo se da una coordenada, obtén la otra con la ecuación de la curva (pueden salir dos puntos; si el enunciado da una condición como $y \geq 0$, úsala).
2. **Pendiente.** $m = y'$ en el punto (directa, implícita o paramétrica).
3. **Rectas.** Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$; normal con pendiente $-\frac{1}{m}$. Escríbelas en forma general $Ax + By + C = 0$ si lo piden.
4. **Tangente con condición.** Horizontal: $y' = 0$. Paralela a $Ax + By + C = 0$: $y' = -\frac{A}{B}$. Perpendicular: $y' = \frac{B}{A}$. Resuelve la ecuación junto con la de la curva para hallar los puntos de tangencia.
5. **Área de un triángulo.** Intersecta las rectas entre sí y con el eje indicado; el área es $\frac{1}{2}$ base · altura con las intersecciones.

2A.3.7 Ángulo entre dos curvas

1. Resuelve el sistema de las dos ecuaciones: puntos de intersección.
2. En cada punto, la pendiente de cada curva (m_1, m_2); si una es recta, su pendiente es fija.
3. $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ y $\varphi = \text{ang tan}(\ldots)$. Si $1 + m_1 m_2 = 0$, $\varphi = 90°$. Si una tangente es vertical y la otra tiene pendiente m, $\varphi = 90° - \text{ang tan}\,|m|$.
4. Si se pide la tangente que forma un ángulo dado con una recta, plantea la ecuación con el valor absoluto: salen dos pendientes.

2A.3.8 Razón de cambio: plantilla de cinco pasos

1. **Figura y variables.** Dibuja la situación y nombra con letras las cantidades que cambian con el tiempo (r, V, x…). Los datos fijos van con su número.
2. **Datos y pregunta.** Escribe la razón conocida con su signo ($\frac{dV}{dt} = -60$ si disminuye), lo que se pide ($\frac{dA}{dt} = ?$) y el instante ($r = 4$). Uniforma las unidades.
3. **Ecuación.** Relaciona las variables con geometría (volumen, área, Pitágoras, triángulos

1. Base $\to \infty$, exponente $\to 0$: forma ∞^0.
2. Sea $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$: $\ln y = x \ln \frac{1}{x} = -x \ln x = -\dfrac{\ln x}{1/x}$, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

2B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2B**.

Ejercicio propuesto 2B.6.1

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \cos x)^{\csc x}$.

Resultado: e.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 167.

Ejercicio propuesto 2B.6.2

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$.

Resultado: $-\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Ejercicio propuesto 2B.6.3

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to\infty} 4x \,\text{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)$.

Resultado: 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Ejercicio propuesto 2B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2016-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \text{senh}\, x)^{\coth x}$.

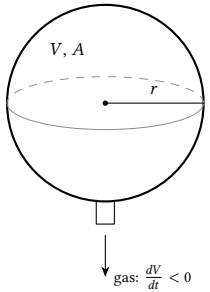
Resultado: e^{-1}.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 168.

Ejemplo resuelto · Razón de cambio: el globo que pierde gas

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Un globo de forma esférica deja escapar gas a razón de 60 mm^3/min. ¿A qué razón decrece el área del globo en el instante en que el radio es 4 cm?



Resolución.

1. **Variables:** radio r, volumen V y área A de la esfera, funciones del tiempo t (en minutos).
2. **Datos:** el volumen disminuye, así que $\frac{dV}{dt} = -60\ \text{mm}^3/\text{min}$. Se pide $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 4\ \text{cm} = 40\ \text{mm}$ (todo en milímetros).
3. **Ecuaciones:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.
4. **Derivadas respecto a t:**

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

5. **Instante $r = 40$:** de la primera, $\frac{dr}{dt} = \frac{-60}{4\pi(40)^2} = -\frac{3}{320\pi}$ mm/min. En la segunda:

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(40)\left(-\frac{3}{320\pi}\right) = -3\ \text{mm}^2/\text{min}.$$

6. Atajo: al dividir las dos derivadas, $\frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{40}(-60) = -3$.

Resultado: el área decrece a razón de 3 mm^2/min (0.03 cm^2/min).

2A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2A.5.1 · Ang sec y potencias

Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 4.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para: a) $y = \operatorname{ang\,sec}(3x)$; b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Resolución.

2B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · L'Hôpital, forma 1^∞

Adaptado de: 1er final 2011-2, tipo C, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

Resolución.

1. Al sustituir, la base tiende a 1 y el exponente a ∞: forma 1^∞.
2. Sea $y = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$. Entonces

$$\ln y = 3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x}},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
3. Derivadas: $\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]' = \frac{-2/x^2}{1+2/x}$ y $\left[\frac{1}{3x}\right]' = -\frac{1}{3x^2}$.
4. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{-2/x^2}{1+2/x}\cdot\left(-3x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+2/x} = 6.$$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$.
6. Comprobación con la fórmula de e: $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} \to e^{ab}$ con $a = 2$ y $b = 3$.

Ejemplo resuelto · L'Hôpital con hiperbólicas

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 2.

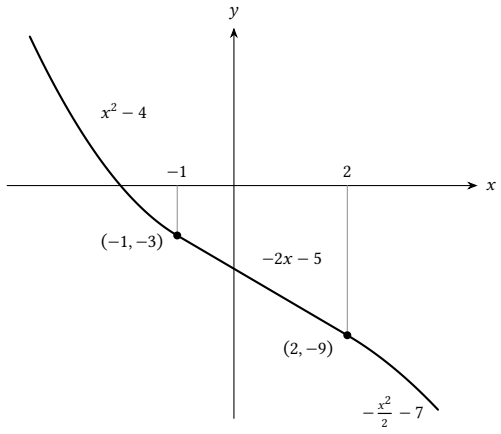
Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. $\cosh 0 = 1$ y $\frac{1}{\operatorname{senh} x} \to \infty$: forma 1^∞.
2. Sea $y = (\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$; $\ln y = \frac{\ln\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$ ($\ln 1 = 0$, $\operatorname{senh} 0 = 0$).
3. L'Hôpital, con $(\ln\cosh x)' = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tanh x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.
5. Comprobación con la regla rápida de 1^∞: $\frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} \to 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to 0$), así que el límite es e^0.



Resultado: $a=-2$, $b=-5$.

Ejercicio 2A.5.3 · Implícita con tangente y cadena con raíz

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2\tan y = x+y$; b) $y=\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$.

Resolución.

1. a) Derivación implícita (producto a la izquierda):

$$2x\tan y + x^2\sec^2 y\, y' = 1 + y'.$$

2. Se agrupa y se despeja:

$$\left(x^2\sec^2 y - 1\right)y' = 1 - 2x\tan y \;\Rightarrow\; y' = \frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y - 1}.$$

3. b) Con $u=\frac{2x}{2x-1}$, $y=\sqrt{u}$ y $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Regla del cociente:

$$u' = \frac{2(2x-1)-2x(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

4. Entonces

$$y' = -\frac{2}{(2x-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}} = -\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}},$$

válida en $x<0$ o $x>\frac{1}{2}$, donde la raíz existe y la derivada también.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y-1}$; b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}$.

Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

↑ Volver al índice

Contenido de esta parte (programa 2026, tema 2). «Regla de L'Hopital y sus aplicaciones a formas indeterminadas de límites de funciones. Uso de software matemático para ilustrar resultados.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores la regla era de Cálculo Integral y compartía un problema con la integral impropia (Parte 3C). Sale en 28 de los 52 finales y extraordinarios del Plan 2010 (formas 1^∞ 9, $\infty-\infty$ 5, 0^0 5, $0\cdot\infty$ 3 y otras 6) y en 17 de los 60 del Plan 2016. Las hiperbólicas aparecen dentro de los límites con frecuencia.
- **Tiempo:** 2 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2B.1.1 y la tabla de la sección 2B.2 (15 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 2B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 2B.5 con cronómetro: 12 min cada uno.

2B.1 Conceptos y expresiones

2B.1.1 Regla de L'Hôpital

Si $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, o los dos límites son infinitos, y existe $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), entonces

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vale para $x\to a$, $x\to a^{\pm}$ y $x\to\pm\infty$. Se derivan el numerador y el denominador *por separado* (no es la regla del cociente). Si el nuevo límite vuelve a ser $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica otra vez.

Las siete formas indeterminadas. Solo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ admiten la regla directamente. $0\cdot\infty$ e $\infty-\infty$ se reescriben como un cociente. 1^∞, 0^0 e ∞^0 se resuelven tomando logaritmo: si $y=f(x)^{g(x)}$, entonces $\ln y = g(x)\ln f(x)$, que es de la forma $0\cdot\infty$, y $\lim y = e^{\lim \ln y}$. No son indeterminadas: $\frac{0}{\infty}=0$, $\infty+\infty=\infty$, $0^\infty=0$, $\infty^\infty=\infty$.

Límites que conviene saber de memoria. Con $x\to\infty$: $\frac{\ln x}{x}\to 0$, $\frac{x^n}{e^x}\to 0$, $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\to e^{ab}$; con $x\to 0^+$: $x\ln x\to 0$, $x^x\to 1$. Son consecuencias de la regla y sirven para anticipar el resultado. Con $x\to 0$: $\operatorname{senh} 0=0$, $\cosh 0=1$, $\frac{\operatorname{senh} x}{x}\to 1$ (las hiperbólicas, en la sección 1A.1.9).

5. Comprobación: la curva es la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, de centro $(2,2)$ y radio $2\sqrt{2}$; las tangentes horizontales están arriba y abajo del centro.

Resultado: $\big(2,\ 2+2\sqrt{2}\big)$ y $\big(2,\ 2-2\sqrt{2}\big)$.

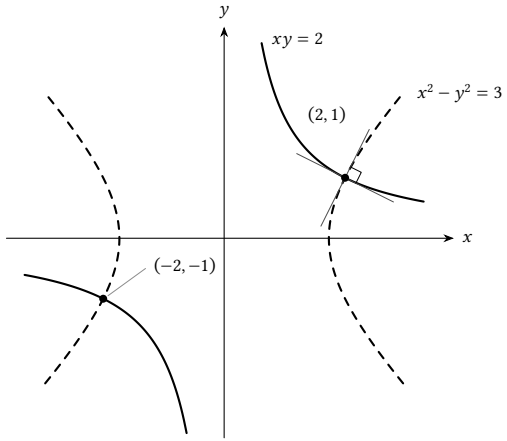
Ejercicio 2A.5.7 · Ángulo entre dos hipérbolas

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 4.

Sean las curvas $C_1:\ xy=2$ y $C_2:\ x^2-y^2=3$. Determine el ángulo de intersección entre C_1 y C_2.

Resolución.

1. Intersección: de C_1, $y=\frac{2}{x}$. En C_2: $x^2-\frac{4}{x^2}=3\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$. Entonces $x=\pm 2$: puntos $(2,1)$ y $(-2,-1)$.
2. Pendientes por derivación implícita. C_1: $y+xy'=0\Rightarrow m_1=-\frac{y}{x}$. C_2: $2x-2yy'=0\Rightarrow m_2=\frac{x}{y}$.
3. En $(2,1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Entonces $1+m_1m_2=1-1=0$: las tangentes son perpendiculares.
4. En $(-2,-1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Mismo resultado.
5. En general $m_1m_2=-\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=-1$ en cualquier punto común: las dos familias de hipérbolas son ortogonales.



Resultado: $\varphi=90^\circ$ en los dos puntos de intersección, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

Ejercicio 2A.5.8 · Razón de cambio: el esquiador en la rampa

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.

Un esquiador se desliza a razón de 10 m/s sobre una rampa en forma de plano inclinado, de 400 m de base horizontal y 300 m de altura. Sea p su distancia, medida sobre la rampa, al punto más bajo, y x la proyección horizontal de esa distancia. Determine la rapidez con la que cambia x.

12. $x^{\operatorname{sen} x}$ **con la regla de la potencia**: con la variable en el exponente se usa derivación logarítmica.

2A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ · derivable $\Rightarrow$ continua.
- $(uv)'=uv'+vu'\cdot\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}\cdot(u^n)'=nu^{n-1}u'\cdot\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen} u)'=\cos u\,u'\cdot(\cos u)'=-\operatorname{sen} u\,u'\cdot(\tan u)'=\sec^2 u\,u'\cdot(\sec u)'=\sec u\tan u\,u'$.
- $(\cot u)'=-\csc^2 u\,u'\cdot(\csc u)'=-\csc u\cot u\,u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen} u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(\operatorname{ang\,tan} u)'=\frac{u'}{1+u^2}\cdot(\operatorname{ang\,sec} u)'=\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y-y_0=m(x-x_0)\cdot$ normal con $-\frac{1}{m}\cdot Ax+By+C=0$ tiene $m=-\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|\cdot m_1m_2=-1\Rightarrow\varphi=90^\circ$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $A=4\pi r^2\cdot$ cilindro $V=\pi r^2h\cdot$ cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2h\cdot$ círculo $A=\pi r^2$.
- Diferencial: $dy=f'(x)\,dx\cdot f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.
- $(\ln u)'=\frac{u'}{u}\cdot(e^u)'=e^uu'\cdot(a^u)'=a^u\ln a\,u'\cdot(\operatorname{senh} u)'=\cosh u\,u'\cdot(\cosh u)'=\operatorname{senh} u\,u'\cdot(\tanh u)'=\operatorname{sech}^2 u\,u'$.
- $y=f^g$: $\ln y=g\ln f$, $y'=f^g\left(g'\ln f+g\frac{f'}{f}\right)$.

2A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Reconoce el tipo con la tabla 2A.2 y escribe la fórmula que vas a usar antes de calcular.
2. En las derivadas, reescribe raíces como potencias y deriva capa por capa; en la implícita, marca cada y'.
3. En tangente y normal: punto completo, pendiente, punto-pendiente; da la forma general si la piden.
4. En razón de cambio, sigue los cinco pasos con su rótulo; sustituye el instante solo al final y di si la cantidad aumenta o disminuye.
5. Comprueba: el punto está en la curva, las pendientes de rectas perpendiculares multiplican -1, las unidades cuadran.

Si no terminas una razón de cambio, la figura, los datos con signo y la ecuación derivada ya valen buena parte del problema.

2A.10 Lo que agrega el Plan 2026: la derivada como razón de cambio física

Si $s(t)$ es la posición de un móvil sobre una recta en el instante t, su derivada es la **velocidad**, $v(t)=s'(t)$, y la derivada de la velocidad es la **aceleración**, $a(t)=v'(t)=s''(t)$: la derivada de orden superior tiene un significado físico. El signo de v dice hacia dónde se mueve; el

4. Derivando implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \, \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

5. Se multiplica por $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy+y^2}{1-x^2-2xy}$; b) $\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

Ejercicio 2A.5.10 · Derivada por definición de una raíz

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C, problema 1.

Determine la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con el método de los cuatro pasos, es decir, con la definición de derivada.

Resolución.

1. $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}}$, con $x > 0$.
2. Incremento, con denominador común:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}.$$

3. Se divide entre h y se racionaliza el numerador (por $\sqrt{x} + \sqrt{x+h}$):

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}.\end{aligned}$$

4. Límite con $h \to 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

5. Comprobación con la regla de la potencia: $\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

Resultado: $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, para $x > 0$.

2A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2A**.

Ejercicio propuesto 2A.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$G: \begin{cases} x^2 = \operatorname{sen}^2\theta, \\ y = \cos^2\theta, \end{cases}$$

en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$ y abscisa positiva.

Resultado: $4x + 4y - 5 = 0$, tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.2

Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 4.

La tangente a la curva $y = x^2$ en un punto P corta a la recta $3x - y + 1 = 0$ formando un ángulo de 45°. Determine las coordenadas de P.

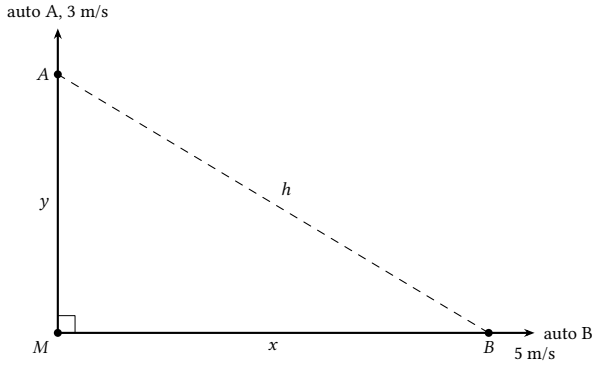
Resultado: $P(-1, 1)$ o $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.3

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3.

Dos autos parten al mismo tiempo de un punto M en direcciones perpendiculares, como en la figura. El auto A va a 3 m/s y el auto B a 5 m/s. Determine la rapidez con que aumenta la distancia h entre ellos en el instante en que el auto A ha recorrido 9 m.



Resultado: $\frac{dh}{dt} = \sqrt{34}$ m/s ≈ 5.83 m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.

Ejercicio propuesto 2A.6.4

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2020-1, problema 3.

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $e^{xy} - x = \ln e^y$; b) $x = 3\operatorname{senh}(3t)$, $y = 2\cosh(3t)$.

Resultado: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y\,e^{xy}}{x\,e^{xy}-1}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 166.